"Guten Tag, ich hätte gerne 100 Mottenkugeln." - "Haben Sie nicht schon gestern 100 Stück gekauft?" - "Na und? Treffen Sie etwa mit jedem Wurf?"

Es kommt nicht nur auf die Weite an …

Wurfbewegungen

Zum Leidwesen der Schüler unterscheidet der Physiker zwischen mehreren Wurf-Arten. Dabei wird (abgesehen vom senkrechten Wurf) immer irgendwie nach der Weite gefragt. In der Theorie ist der Wurf zunächst einmal eine **überlagerte Bewegung**: geradlinig gleichförmig und freier Fall gleichzeitig. Somit entsteht eine **Wurfparabel**, welche in einem s_y-s_x-Diagramm anschaulich dargestellt wird. Um einfacher rechnen zu können, betrachtet man die Wurfbewegung zunächst in horizontaler und dann in senkrechter Richtung.

	gleichförmiger Anteil	Anteil vom freien Fall	zusammen
horizontal (s_x)	$v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$	NULL (der Körper fällt nicht horizontal!)	$\boxed{s_x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha}$
vertikal (s_y)	$v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha$	$-\frac{g}{2}t^2$	$\boxed{s_y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2}t^2}$

Als mathematisch gebildeter Physiker sucht man nun nach einer Formel, welche die Wurfparabel als quadratische Funktion im s_y-s_x-Koordinatensystem abbildet. Diese Formel, die so genannte **Bahngleichung**, erhält man aus den Gleichungen für s_x und s_y, welche als Gleichungssystem betrachtet werden:

$$\boxed{s_y = s_x \cdot \tan\alpha - s_x^{\,2} \cdot \frac{g}{2v_0^{\,2} \cdot \cos^2\alpha}}$$

Auf die ausführliche Herleitung wird hier verzichtet; daran hat sich bestimmt der Physiklehrer schon versucht …

<u>Wozu dient die Bahngleichung?</u>

- Sie liefert die Koordinaten für jeden beliebigen Punkt der Wurfparabel. Das funktioniert wie bei einer Wertetabelle – vorausgesetzt, man kennt die Anfangsgeschwindigkeit und den Wurfwinkel.

- Sie liefert damit auch besondere Werte der Wurfparabel: die Wurfhöhe (entspricht der s_y-Koordinate des Scheitelpunktes) und die Wurfweite (entspricht der rechten Nullstelle).

Der senkrechte Wurf braucht natürlich keine solche Bahngleichung – er ist in Wirklichkeit nur eine getarnte geradlinige Bewegung …

Der Gärtner lässt Wasser aus einem Schlauch unter einem Winkel von 30° herauslaufen. Wenn der Schlauch am Boden liegt, geht der Strahl 5m weit. Zeichnen Sie die Parabel!

Aus der Bahngleichung hatten wir die Formel für die Wurfweite hergeleitet. Mit dieser berechnen wir die Anfangsgeschwindigkeit und erstellen dann eine Wertetabelle.

$$\boxed{s_{Xmax} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{s_{Xmax} \cdot g}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{5\text{m} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sin 60°}} = 7{,}53\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

f(x)=0.57735*x-0.11534*x^2

$$\boxed{s_y = s_x \cdot \tan\alpha - s_x^2 \cdot \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}} \leftarrow \quad \tan\alpha = 0{,}57735 \quad ; \quad \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} = 0{,}11534$$

Der Gärtner von eben hält nun den Schlauch einen Meter hoch. Zeichnen Sie die Parabel und bestimmen Sie die neue Weite rechnerisch!

Wegen der Anfangshöhe verschiebt sich die Wurfparabel um einen Meter nach oben. Genau so sieht die neue Bahngleichung aus:

$$s_y = s_x \cdot \tan\alpha - s_x^2 \cdot \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} + h$$

Die anderen Werte haben sich nicht geändert, wir setzen sie einfach ein:

$$s_y = s_x \cdot 0{,}57735 - s_x^2 \cdot 0{,}11534 + 1$$

f(x)=0.57735*x-0.11534*x^2+1

Über die richtigen Einheiten zerbrechen wir uns ausnahmsweise nicht den Kopf – unsere Lösung ergibt sich automatisch in Metern. Wir müssen nur s_y Null setzen und die quadratische Gleichung lösen. Die erste Lösung (welche negativ ist), entfällt – sie entspricht nicht dem gegebenen Sachverhalt.

$$0 = s_x \cdot 0{,}57735 - s_x^2 \cdot 0{,}11534 + 1$$
$$0 = s_x^2 - 5{,}0056 \cdot s_x - 8{,}6700$$
$$s_{x1,2} = 2{,}5028 \pm \sqrt{6{,}264 + 8{,}670}$$
$$s_{x1,2} = 2{,}5028 \pm 3{,}8645$$
$$\underline{\underline{s_{x2} = 6{,}36\text{m}}}$$

Eine Silvesterrakete erreicht nach dem Abschuss unter einem Winkel von 80° eine Höhe von 50m, welche sie nach 3 Sekunden erreicht. Wie weit könnte die Rakete fliegen, wenn der Winkel entsprechend gewählt wird?

Es liegt ein schräger Wurf vor, bei welchem diesmal Angaben über den zeitlichen Verlauf gemacht wurden. Man kann also zunächst die einfachere Gleichung für den senkrechten Anteil der Wurfbewegung anwenden:

$$\boxed{s_y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2}$$

$$v_0 = \frac{s_y + \frac{g}{2} t^2}{t \cdot \sin\alpha}$$

$$v_0 = \frac{50\text{m} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3\text{s})^2}{3\text{s} \cdot \sin 80°} = 31{,}87\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

<u>GEGEBEN</u>
Winkel α
Höhe $s_{y\text{-}max}$
Steigzeit t

<u>GESUCHT</u>
Weite $s_{x\text{-}max}$

Mit der Anfangsgeschwindigkeit lässt sich die gesuchte Weite ausrechnen. Der optimale Winkel beträgt natürlich 45°.

$$s_{Xmax} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{(31{,}87\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \cdot \sin 90°}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{103{,}15\text{m}}}$$

Bei einer Polizei-Verfolgungsjagd fährt ein PKW mit 100 km/h auf das unvorhergesehene Ende einer unvollendeten, aber 10 m hohen Brücke zu. Er fliegt anschließend ein wenig durch die Luft und entzieht sich dem Zugriff durch die Beamten. Wie weit ging der Flug?

Physikalisch gesehen würde es sich um einen waagerechten Flug handeln. Praktisch liegt wahrscheinlich ein Versicherungsfall vor.

Wenn man zur Lösung des Falles keine Formel zur Hand hat, tut es auch die „normale" Bahngleichung. Ich würde empfehlen, beim Ansatz die Anfangshöhe (der Brücke) zu berücksichtigen.

$$\boxed{s_y = s_x \cdot \tan\alpha - s_x^2 \cdot \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} + h} \xrightarrow{s_y=0\ ;\ \alpha=0°} 0 = -s_x^2 \cdot \frac{g}{2v_0^2} + h$$

Die „angepasste" Bahngleichung für den waagerechten Wurf stellt man nur noch nach s_x um, erhält somit eine Formel für die Weite - und schon fliegen wir los!

$$s_x = \sqrt{h \cdot \frac{2v_0^2}{g}} \xrightarrow{v_0=27{,}78\frac{\text{m}}{\text{s}}\ ;\ h=10\text{m}} s_x = \sqrt{10\text{m} \cdot \frac{2 \cdot (27{,}28\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \underline{\underline{39{,}67\text{m}}}$$

… wegen der fehlenden Luftreibung ist es im Film mindestens das Doppelte!

<table>
<tr><td colspan="3">

Aufgabe 149 - raubkopiert von http://physikaufgaben.de/index.php

Aus einer Sylvester-Fontäne werden Leuchtkugeln mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 ms^{-1} heraus geschleudert. Sie fliegen senkrecht nach oben und verlöschen beim Aufschlagen auf dem Boden. Nach welcher Zeit erreichen sie eine Höhe von 3 m?

</td></tr>
<tr><td>geg.:</td><td>

$v_0 = 10\frac{m}{s}$
$s = 3m$

</td><td>ges.: t</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="2">

Der Flug der Leuchtkugeln ist ein senkrechter Wurf. Es ist die Zeit in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg gesucht, also nimmt man das Weg-Zeit-Gesetz:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Die Gleichung lässt sich nicht einfach nach t umstellen, da t in zwei Summanden auftaucht und zwar als lineare und als quadratische Größe.
Die Gleichung ist eine quadratische Gleichung und wird dem entsprechend gelöst:
1. Umformen in die Normalform:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$0 = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t - s$$

$$0 = t^2 - \frac{2 \cdot v_0}{g} \cdot t + \frac{2 \cdot s}{g}$$

Auf diese Form wird die bekannte Lösungsvorschrift angewandt und die beiden Zeiten berechnet:

$$t_{1/2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2 \cdot s}{g}}$$

$$t_{1/2} = \frac{10\frac{m}{s}}{9{,}81\frac{m}{s^2}} \pm \sqrt{\frac{100\frac{m^2}{s^2}}{96{,}24\frac{m^2}{s^4}} - \frac{6m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}}$$

$$t_{1/2} = 1{,}02s \pm 0{,}65s$$

$$t_1 = 0{,}37s$$

$$t_2 = 1{,}67s$$

</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="2">

Die Leuchtkugel kommt zweimal in die Höhe von 3 m: beim Hochfliegen nach 0,37s und beim Runterfliegen nach 1,67 s.

</td></tr>
</table>

P.s.: Natürlich kann ich Pitty's Physikseite für individuelle Studien uneingeschränkt weiterempfehlen! Dort gibt's auch viele Beispiele mit Lösungswegen oder gleich die Aufgaben-CD als Weihnachtsgeschenk …