Die gleichförmige Kreisbewegung

„Störe meine Kreise nicht!“ – Diese Aussage soll dem Gelehrten Archimedes seinerzeit sogar den Tod gebracht haben. Kreisbewegungen in der Physik sind manchmal auch nicht ganz ungefährlich, wie manche Autofahrer schon leidvoll erfahren mussten.

Physiker nutzen verschiedene Größen, um Kreisbewegungen effektiv zu beschreiben:

Die Umfangsgeschwindigkeit …
… gibt die („normale“) Bahngeschwindigkeit des Körpers auf seiner Kreisbahn an. Bei rotierenden Körpern ist dabei die Geschwindigkeit eines äußeren Punktes gemeint.

Die Winkelgeschwindigkeit …
… gibt an, wie schnell sich der Drehwinkel ändert.

Die Drehzahl …
… gibt die Anzahl der Umdrehungen innerhalb einer bestimmten Zeit an. Gern wird hier auch von „Drehfrequenz“ oder nur „Frequenz“ gesprochen.

Bei einem rotierenden Körper messen wir an jeder Stelle die gleiche Winkelgeschwindigkeit. Die Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf diesem Körper hängt jedoch vom jeweiligen Radius der Kreisbahn ab. Dieser Zusammenhang wird ausgedrückt durch die Formel

$$\boxed{v = \omega \cdot r}$$

Da eine volle Umdrehung dem Drehwinkel 2π (360°) entspricht, kann man den Zusammenhang zwischen Drehzahl und Winkelgeschwindigkeit wie folgt beschreiben:

$$\boxed{\omega = 2\pi \cdot n}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\boxed{v = \underbrace{2\pi \cdot n}_{\omega} \cdot r}$$

Natürlich darf daran gedacht werden, dass darüber hinaus die Anwendung des Weg-Zeit-Gesetzes der geradlinig gleichförmigen Bewegung auch bei der gleichförmigen Kreisbewegung möglich ist. An einigen kleinen Rechenbeispielen soll die Anwendung dieser Gleichungen trainiert und das Verständnis für Zahlenangaben verbessert werden.

Die Mitflieger auf einem Kettenkarussell kreisen auf einer Bahn von 25 m Durchmesser. Eine vollständige Umdrehung dauert 6 Sekunden. Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit!

Zu dieser Frage gibt es sicher verschiedene Lösungsansätze. Ich würde aus der gegebenen Umlaufzeit zuerst die Drehzahl bestimmen …

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{6} s^{-1}$$

$$v = 2\pi n \cdot r = 2\pi \cdot \tfrac{1}{6} s^{-1} \cdot 12{,}5\,m = 13{,}09 \tfrac{m}{s} = \underline{\underline{47{,}1 \tfrac{km}{h}}}$$

Bitte die Drehzahl (wegen der gleichen Einheit) nicht mit der Winkelgeschwindigkeit verwechseln!

Ein Fahrrad wird mit einer Übersetzung 36:12 gefahren (Kettenblatt vorn: 36 Zähne, Zahnkranz hinten: 12 Zähne). Der Durchmesser des Hinterrades beträgt 64 cm und die Geschwindigkeit 24 km/h. Berechnen Sie die Trittfrequenz!

Bestimmen wir zunächst die Drehzahl des Hinterrades:

$$v = 2\pi n \cdot r \quad \rightarrow \quad n = \frac{v}{2\pi r} = \frac{6\frac{2}{3} \frac{m}{s}}{2\pi \cdot 0{,}32\,m} \approx 3{,}32 \tfrac{1}{s}$$

Mit „Trittfrequenz" ist die Drehzahl der Kurbel gemeint. Aufgrund der gewählten Übersetzung ist diese um den Faktor 3 kleiner als hinten, da vorn das größere Zahnrad sitzt. Sie beträgt also 1,1 s^{-1}.

Ein Traktor fährt die Bereifung V 420/70 24 H 520/70 34. Die Raddurchmesser betragen daher vorn 90 cm und hinten 123 cm. Der Traktor fährt 24 km/h schnell.

a) Wie oft drehen sich die Räder pro Minute?

b) Vergleichen Sie die Drehzahlen von Vorder- und Hinterrad!

$$v = 2\pi n \cdot r$$

$$\rightarrow \quad n_1 = \frac{v}{2\pi r_1} = \frac{6\frac{2}{3} \frac{m}{s}}{2\pi \cdot 0{,}45\,m} = 2{,}36 \tfrac{1}{s} = 141{,}5 \tfrac{1}{min}$$

$$\rightarrow \quad n_2 = \frac{v}{2\pi r_2} = \frac{6\frac{2}{3} \frac{m}{s}}{2\pi \cdot 0{,}615\,m} = 1{,}73 \tfrac{1}{s} = 103{,}5 \tfrac{1}{min}$$

Die Räder des Traktors haben natürlich dieselbe Umfangsgeschwindigkeit, damit sie sich nicht selber überholen können. Das Vorderrad dreht sich trotzdem 1,4mal schneller als das Hinterrad – es ist ja auch kleiner.

Die beiden Zeiger einer Uhr sind 30 cm bzw. 20 cm lang. Vergleichen Sie ihre Geschwindigkeiten miteinander!

Welche Zeiger sind hier gemeint? Wahrscheinlich Stunden- und Minutenzeiger. Und welche Geschwindigkeiten sind gesucht? Schau‘n wir mal!

Minutenzeiger:

$$\omega_M = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60\text{min}} \approx 0{,}105\text{min}^{-1}$$

$$v_M = \omega_M \cdot r = \frac{2\pi}{60\text{min}} \cdot 30\text{cm} \approx 3{,}14\frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

Stundenzeiger:

$$\omega_S = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12\text{h}} \approx 0{,}00873\text{min}^{-1}$$

$$v_S = \omega_S \cdot r = \frac{2\pi}{12 \cdot 60\text{min}} \cdot 20\text{cm} \approx 0{,}175\frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

Damit ist die Winkelgeschwindigkeit des Minutenzeigers 12mal und die Bahngeschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers 18mal größer als beim Stundenzeiger. Warum eigentlich ???

Hinweis:

Unter „Vergleichen“ versteht man an höheren Schulen meist die Angabe eines Verhältnisses oder eines Prozentwertes.

Ein Rennrad wird mit einer Übersetzung 48:12 gefahren (Kettenblatt vorn: 48 Zähne, Zahnkranz hinten: 12 Zähne). Der Umfang des Hinterrades beträgt 2 m. Die Fahrerin macht eine vollständige Kurbelumdrehung pro Sekunde. Wie schnell fährt sie dabei?

Bei der hier gewählten Übersetzung dreht sich das Hinterrad viermal schneller als die Kurbel. Auch ohne Rechnung beträgt die Drehzahl also 4s^{-1}.

4 Umdrehungen pro Sekunde bedeuten aufgrund des Umfanges gleichzeitig 8 m Fahrstrecke (in derselben Zeit).

Also beträgt die Geschwindigkeit:

$$v = 8\frac{\text{m}}{\text{s}} = 28{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

(rechts eine schematische Darstellung)

Gesehen auf: http://www.leifiphysik.de/.../10radfahren/schaltung/schaltung.htm