Wie berechnet man Bewegungen?

Lösungsansätze in der Kinematik

Es gibt zwar viele verschiedene Bewegungen, dafür braucht man jedoch nur einige wenige Formeln. Bei Kreis- und Wurfbewegungen können diese Gleichungen ebenfalls angewendet werden, wenn die Fragestellung dazu passt ☺!

geradlinig-	**gleichförmige** Bewegung	gleichmäßig **beschleunigte** Bewegung
Weg-Zeit-Gesetz	$\boxed{s = v \cdot t}$	$\boxed{s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t}$
Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz	v = konstant	$\boxed{v = a \cdot t + v_0}$

Aus Gründen der Vereinfachung wird ein eventuell gegebener Anfangsweg s_0 nicht berücksichtigt, bzw. gilt: $s_0 = 0$. Die Bedeutung der verwendeten Symbole sollte aus Regelschul-Zeiten bekannt sein.

Folgende Frage-Taktik bei der Aufgabenanalyse hat sich bewährt:

Frage 1: **„Welche Bewegungsart liegt vor?“**
Antwort: gleichförmig oder beschleunigt (wenn sich die Geschwindigkeit ändert) oder schlimmstenfalls beides

---

Frage 2: **„Ändert sich die Beschleunigung während der Bewegung?“**
Idee: falls ja, teilt man in die Bewegung in mehrere Phasen ein

---

Frage 3: **„Wie viele Körper sind an dem Vorgang beteiligt?“**
Idee: man betrachtet evtl. die Körper nacheinander (hilft leider nicht immer)

Frage 4: **„Bewegt sich der Körper schon von Beginn an?“**
(nicht sinnvoll bei gleichförmiger Bewegung)
Antwort: wenn ja, Anfangsgeschwindigkeit v_0 berücksichtigen; wenn nicht → ☺

Nach dieser Orientierung macht man sich beim Physiklehrer(in) beliebt und notiert die gegebenen und gesuchten Größen – dabei bitte auf die richtigen (Grund)Einheiten achten! Es empfiehlt sich natürlich immer, den Bewegungsablauf in einem Diagramm (besonders gern gesehen: das v-t-Diagramm) abzubilden oder eine Skizze zu machen.

Und nun wird einfach drauflos gerechnet …

Auf einer Teststrecke wurde die Bewegung eines Autos wie folgt aufgenommen:

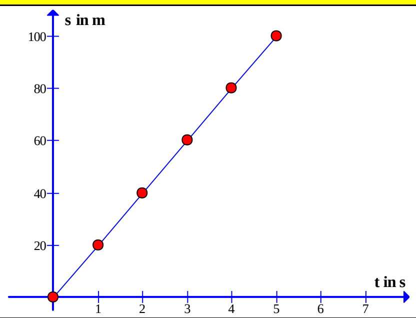
t in s	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
s in m	0	20	40	60	80	100

a. Zeichnen Sie das s-t-Diagramm! Welche Bewegungsform liegt vor?
b. Welche Geschwindigkeit hatte das Auto?
c. Wie viele Kilometer schafft das Auto in fünf Minuten?

Die Sache mit dem Diagramm sollte eigentlich kein Problem gewesen sein.

Erkenntnis: Die roten Punkte liegen alle auf einer Gerade. Wenn das so ist, handelt es sich um eine **gleichförmige Bewegung**.

Für diese kommt nur eine Formel in Frage: s=v·t



Geschwindigkeit:

$$s = v \cdot t \;\rightarrow\; v = \frac{s}{t} = \frac{100\text{m}}{5\text{s}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} \overset{\times 3{,}6}{=} 72\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Kilometer:

$$s = v \cdot t \;\rightarrow\; s = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 300\text{s} = 6\text{km}$$

Ein Fernfahrer fährt 80 km weit mit 100 km/h und danach weitere 180 km mit 90 km/h. Dazwischen macht er eine Pause von 10 Minuten. Wie lange dauert die gesamte Fahrt? Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit?

GEGEBEN:
gleichförmige Bewegungen (2 Phasen)
Phase 1) s = 80 km ; v = 100 km/h
Pause) t = 10 min
Phase 2) s = 180 km ; v = 90 km/h

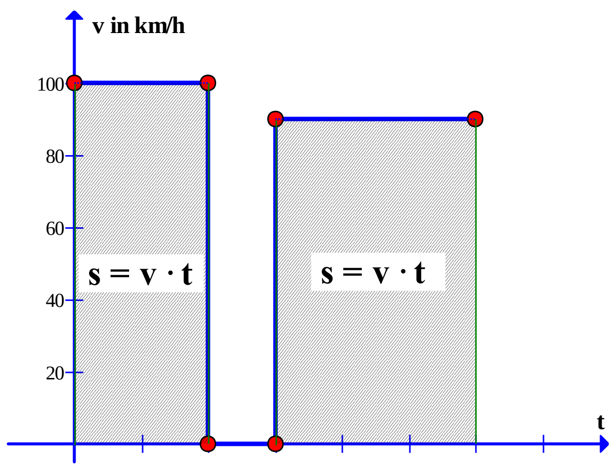
GESUCHT: Teil- und Gesamtzeiten, Durchschnittsgeschwindigkeit

LÖSUNG:

$$s = v \cdot t \;\rightarrow\; t = \frac{s}{v}$$

Phase 1: $t_1 = \dfrac{80\text{km}}{100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}8\text{h} = 48\text{min}$

Phase 2: $t_2 = \dfrac{180\text{km}}{90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 2{,}0\text{h} = 120\text{min}$



$$t_{ges} = t_1 + \text{Pause} + t_2 = 48\text{min} + 10\text{min} + 120\text{min} = 178\text{min}$$

$$\bar{v} = \frac{s_{ges}}{t_{ges}} = \frac{80\text{km} + 180\text{km}}{178\text{min}} = \frac{260\text{km}}{2{,}97\text{h}} = 87{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Wenn nach der Durchschnittsgeschwindigkeit gefragt ist, wird die gesamte Bewegung heimlich als komplett gleichförmig betrachtet. Man muss also den Gesamtweg durch die Gesamtzeit teilen – nicht etwa den Mittelwert der Geschwindigkeiten bilden!

Zwei Minuten nach dem Start erreicht ein Space Shuttle der NASA die Geschwindigkeit 4725 km/h. Welche Strecke hat es bis dahin zurückgelegt?

GEGEBEN
einfache **beschleunigte Bewegung***
ohne Anfangsgeschwindigkeit (v_0 = 0)
t = 2 min = 120 s
v = 4725 km/h = 1312,5 m/s

* wir tun mal so, als ob die Beschleunigung bis dahin konstant gewesen wäre

GESUCHT
Strecke s

Es gelten die zwei Gesetze der beschleunigten Bewegung. Um die Strecke zu berechnen, benötigt man aber auch die Beschleunigung. Deshalb zunächst das v-t-Gesetz anwenden!

LÖSUNG

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \cancel{+ v_0 \cdot t}$$

$$v = a \cdot t \cancel{+ v_0}$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{1312{,}5\,\frac{m}{s}}{120s} = 10{,}94\,\frac{m}{s^2}$$

$$s = \frac{10{,}94\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (120s)^2 = \underline{\underline{78750m}}$$

Acht Minuten nach dem Start beträgt die Geschwindigkeit des Shuttles von eben 24835,9 km/h, nach weiteren 20 Sekunden liegt diese bereits bei 26855,0 km/h. Berechnen Sie den Beschleunigungswert und die in dieser Zeit zurückgelegte Strecke!

GEGEBEN
beschleunigte Bewegung*
mit Anfangsgeschwindigkeit!
v_0 = 24835,9 km/h = 6898,9 m/s
t = 20 s
v = 26855,0 km/h = 7459,7 m/s

GESUCHT
Beschleunigung a
Strecke s

LÖSUNG

$$\boxed{v = a \cdot t + v_0} \quad |-v_0$$

$$v - v_0 = a \cdot t \quad |:t$$

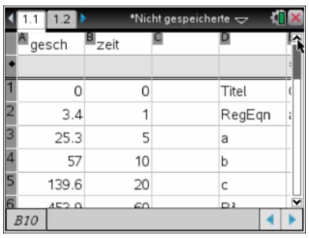
$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{7459{,}7\,\frac{m}{s} - 6898{,}9\,\frac{m}{s}}{20s} = \underline{\underline{28{,}04\,\frac{m}{s^2}}}$$

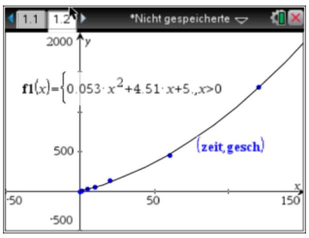
$$\boxed{s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t}$$

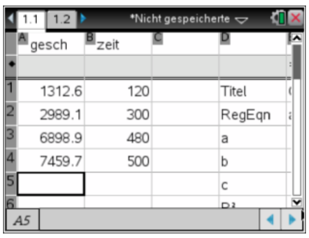
$$s = \frac{28{,}04\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (20s)^2 + 6898{,}9\,\frac{m}{s} \cdot 20s = \underline{\underline{143586m}}$$

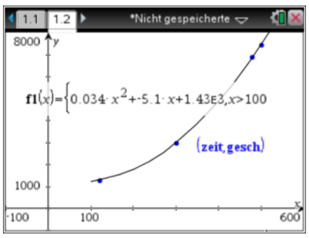
Es ist leider ein häufiger Fehler, wenn Schüler den Summanden $v_0 \cdot t$ vergessen. Ohne ihn rechnet es sich zwar leichter, aber anscheinend nicht ganz richtig ☺!

Mittels CAS und quadratischer Regression lässt sich das Anwachsen der Geschwindigkeit unseres Shuttles (in $m \cdot s^{-1}$) mit der Zeit (in s) sogar als Funktion veranschaulichen:









In der Stadt beträgt die Entfernung zwischen zwei Ampeln 200m. Zunächst beschleunigt der Fahrer in 15 Sekunden auf 72 km/h und bremst dann mit der Verzögerung -4m·s^{-2} wieder ab. Nach wie viel Metern beginnt er zu bremsen, und nach welcher Zeit kommt er zum Stillstand?

GEGEBEN

zusammengesetzte Bewegung

beschleunigt → verzögert (2 Phasen)

t_1 = 15 s ; v_1 = 72 km/h = 20 m/s

a_2 = -4m·s^{-2}

$s_1 + s_2$ = 200m

GESUCHT

s_1, t_2

HINWEIS

Auch bei einer verzögerten Bewegung gibt es eine Beschleunigung, nur ist diese negativ. Dafür muss man keine neue Bewegungsart erfinden.
Da die Phase 2 zum Stillstand führt (v=0), kann man ausnahmsweise v und v_0 vertauschen. Das ist nicht schön, verkürzt aber den Rechenweg. Bitte die Physiklehrerin fragen, ob es erlaubt ist!

LÖSUNG

$$\boxed{s=\frac{a}{2}\cdot t^2+v_0\cdot t \;;\; v=a\cdot t+v_0}$$

Phase 1 – Beschleunigung aus dem Stand

$$a=\frac{v-v_0}{t}=\frac{20\frac{m}{s}-0}{15s}=1{,}33\frac{m}{s^2}$$

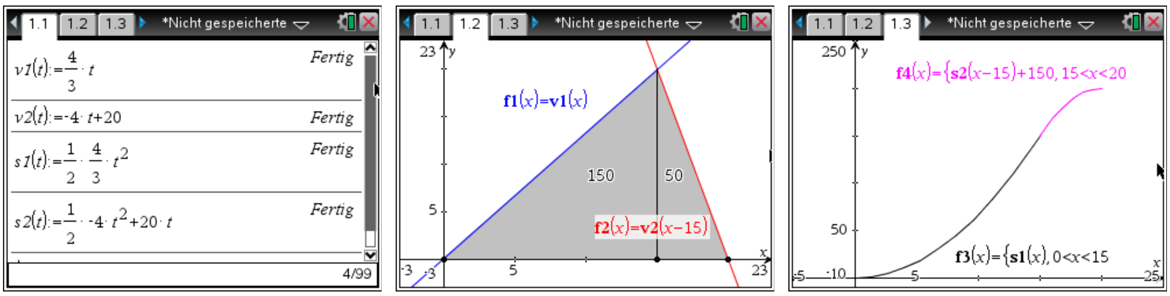
$$s_1=\frac{1}{2}\cdot 1{,}33\frac{m}{s^2}\cdot(15s)^2+0=150m$$

Phase 2 – Verzögerung bis zum Stillstand

$$s_2=50m$$

$$s=\frac{a}{2}\cdot t^2 \;\rightarrow\; t=\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{\frac{2\cdot 50m}{4\frac{m}{s^2}}}=5s$$

… und wer sein CAS schon beherrscht, kann die zum Bewegungsablauf passenden Diagramme auch ziemlich leicht auf's Display zaubern:



(in der Mitte das v-t-, rechts das s-t-Diagramm)

Ein Radler fährt 1 min unverändert mit 14,4 km/h . Dann beschleunigt er in 20 s auf 28,8 km/h. Diese Geschwindigkeit behält er eine weitere Minute bei, bremst aber dann sofort innerhalb von 10 s zum Stillstand ab.

a) Wie groß sind die beiden Beschleunigungswerte?

b) Wie groß ist die gesamte zurückgelegte Strecke?

c) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit während den ersten beiden Minuten?

GEGEBEN

zusammengesetzte Bewegung

(1) gleichförmig → (2) beschleunigt →
(3) gleichförmig → (4) gebremst

t_1 = 1 min ; v_1 = 14,4 km/h = 4 m/s

t_2 = 20 s ; v_2 = 28,8 km/h = 8 m/s

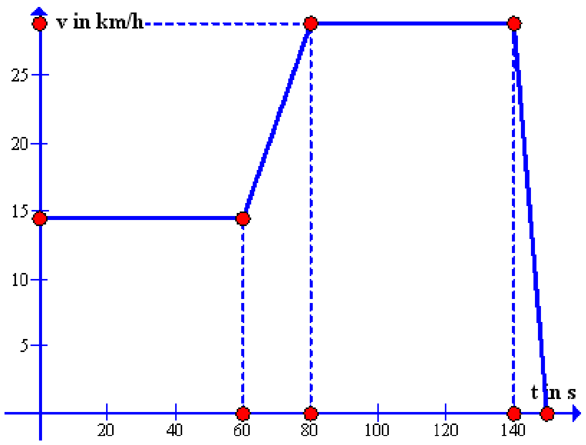
t_3 = 1 min ; v_3 = 28,8 km/h

t_4 = 10 s ; v_4 = 0

GESUCHT

a_2, a_4, s_{GES}, v_{QUER}

Bewegungsablauf mit vier Phasen:



LÖSUNG

Phase 1

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 4\tfrac{m}{s} \cdot 60s = 240m$$

Phase 2

$$v = a \cdot t + v_0 \;\rightarrow\; a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$a_2 = \frac{8\tfrac{m}{s} - 4\tfrac{m}{s}}{20s} = 0{,}2\frac{m}{s^2}$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

$$s_2 = \frac{0{,}2\tfrac{m}{s^2}}{2} \cdot (20s)^2 + 4\tfrac{m}{s} \cdot 20s = 120m$$

Phase 3

$$s_3 = v_3 \cdot t_3 = 8\tfrac{m}{s} \cdot 60s = 480m$$

Phase 4

$$a_4 = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 8\tfrac{m}{s}}{10s} = -0{,}8\frac{m}{s^2}$$

$$s_4 = \frac{-0{,}8\tfrac{m}{s^2}}{2} \cdot (10s)^2 + 8\tfrac{m}{s} \cdot 10s = 40m$$

$$s_{GES} = 240m + 120m + 480m + 40m = 880m$$

$$\bar{v} = \frac{s_{GES}}{t_{GES}} = \frac{240m + 120m + 40s \cdot 8\tfrac{m}{s}}{120s}$$

$$\bar{v} = \frac{680m}{120s} = 5{,}67\frac{m}{s} = 20{,}4\frac{km}{h}$$

Ein Motorradfahrer bemerkt bei 80 kmh^{-1} in 25 m Entfernung ein Ortsschild, ab dem 50 km/h zu fahren sind. Nach 0,7 s Reaktionszeit beginnt er mit -7,5 ms^{-2} stark zu bremsen. Welche Geschwindigkeit hat er an dem Ortseingangsschild?

GEGEBEN

zusammengesetzte Bewegung mit unbekannter Zeit*

gleichförmig → verzögert (2 Phasen)

Phase 1: $v = 80$ km/h = 22,22 m/s
$t = 0,7$ s

Phase 2: $v_0 = 80$ km/h = 22,22 m/s
$a = -7,5$ ms^{-2}

$s_{GES} = 25$ m

Eventuell ist aufgefallen, dass keine Angaben über die Zeit in Phase 2 gemacht werden ☹. Das ist so gewollt …

GESUCHT

s_1, v_2

*HINWEIS

Man schaut zunächst, welche Strecke während der Reaktionsphase zurückgelegt wird. Dann weiß man, wie weit es noch bis zum Schild ist. Aus dieser Reststrecke muss nun mit der (negativen) Beschleunigung und der Anfangsgeschwindigkeit die Endgeschwindigkeit am Schild berechnet werden. Die Herleitung der entsprechenden Formel bleibt natürlich echten Profis vorbehalten.

LÖSUNG

Reaktionsphase (gleichförmig)

$$s_1 = v \cdot t = 22{,}22\tfrac{m}{s} \cdot 0{,}7s = 15{,}56m$$

Verzögerungsphase (negativ beschleunigt)

$$s_2 = 25m - 15{,}56m = 9{,}44m$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t \\ v = a \cdot t + v_0 \ \rightarrow \ t = \frac{v - v_0}{a} \end{array}\right\} \rightarrow s = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a}}$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} \ \rightarrow \ v = ???$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot \frac{(v - v_0)^2}{a^2} + \frac{v_0 \cdot (v - v_0)}{a}$$

$$s = \frac{(v - v_0)^2}{2a} + \frac{2v_0 \cdot (v - v_0)}{2a}$$

$$s = \frac{(v - v_0)^2 + 2v_0 \cdot (v - v_0)}{2a}$$

$$s = \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2 + 2vv_0 - 2v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$s \cdot 2a = v^2 - v_0^2 \ \rightarrow \ v = \sqrt{2as + v_0^2}$$

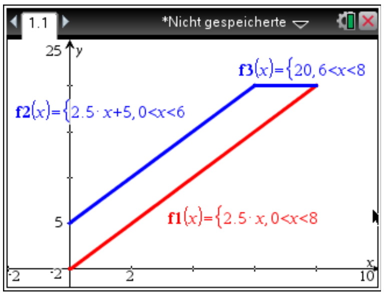
$$v = \sqrt{2 \cdot \left(-7{,}5\frac{m}{s^2}\right) \cdot 9{,}44m + \left(22{,}22\frac{m}{s}\right)^2}$$

$$v = 18{,}77\frac{m}{s} = 67{,}6\frac{km}{h}$$

An einer zweispurigen Straße schaltet die Ampel auf Grün. Ein rotes und ein blaues Auto sind in diesem Moment gleichauf und beschleunigen sofort beide mit 2,5 ms^{-2} – das rote aus dem Stand heraus, während das blaue Auto rollte mit 18 kmh^{-1} an die Ampel heran gerollt war. Wie groß ist der Vorsprung des blauen Autos, wenn beide die Endgeschwindigkeit von 72 kmh^{-1} erreicht haben?

GEGEBEN

zusammengesetzte Bewegung mit unbekannter Zeit und zwei Körpern



rot: $v_0 = 0$
$v = 72\ kmh^{-1} = 20\ ms^{-1}$
$a = 2{,}5\ ms^{-2}$
beschleunigt

blau: $v_0 = 18\ kmh^{-1} = 5\ ms^{-1}$
$v = 72\ kmh^{-1} = 20\ ms^{-1}$
$a = 2{,}5\ ms^{-2}$
beschleunigt → gleichförmig

Die Dauer der einzelnen Bewegungsabschnitte müssen wir uns wohl wieder erst beschaffen …

GESUCHT

t, s_{rot}, s_{blau}, Δs

HINWEIS

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm (siehe oben) überlegt man sich zuerst ohne Achseneinteilung – da uns die Zeiten nicht bekannt sind.

LÖSUNG

rotes Auto (beschleunigt):

$$v = a \cdot t + v_0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{20\frac{m}{s} - 0}{2{,}5\frac{m}{s^2}} = 8s$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t = \frac{2{,}5\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (8s)^2 + 0 = 80m$$

blaues Auto (beschleunigte Phase):

$$v = a \cdot t + v_0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{20\frac{m}{s} - 5\frac{m}{s}}{2{,}5\frac{m}{s^2}} = 6s$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t = \frac{2{,}5\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (6s)^2 + 5\tfrac{m}{s} \cdot 6s = 75m$$

…logisch: weil der Blaue schon fährt (unfair!), erreicht er die Endgeschwindigkeit früher als der Rote. Dann muss er noch 2s so weiterfahren:

blaues Auto (gleichförmige Phase):

$$t = 8s - 6s = 2s$$

$$s = v \cdot t = 20\tfrac{m}{s} \cdot 2s = 40m$$

Summa Summarum:

$$\Delta s = s_{BLAU} - s_{ROT} = (75m + 40m) - 80m = 35m$$

ANTWORT

Vorausgesetzt, die Tachometer der beteiligten Autos haben wirklich so genau funktioniert, hat der Blaue also 35 m Vorsprung – aber nur, weil er sich vor der roten Ampel Zeit gelassen hat. Weitblick zahlt sich also manchmal wirklich aus!

Zwei PKW's fahren von Schmalkalden nach Berlin, was einer Strecke von 350 km entspricht. Sie starten gleichzeitig, allerdings fährt der erste durchschnittlich mit 130 km/h, der zweite nur mit 120 km/h. Wie groß ist der Vorsprung des schnelleren PKW's?

GEGEBEN

gleichförmige Bewegung mit zwei Körpern

s = 350 km
v_1 = 130 kmh^{-1}
v_2 = 120 kmh^{-1}
(beide gleichförmig)

GESUCHT

Zeitdifferenz Δt

HINWEIS

Zugegeben – die Frage nach dem Vorsprung könnte sich auch auf den räumlichen Abstand der Autos beziehen – da beide aber dasselbe Ziel haben, interessiert uns eher die Zeitdifferenz.

LÖSUNGSVARIANTE

$$s = v \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{s}{v}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} = \frac{350\text{km}}{120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} - \frac{350\text{km}}{130\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

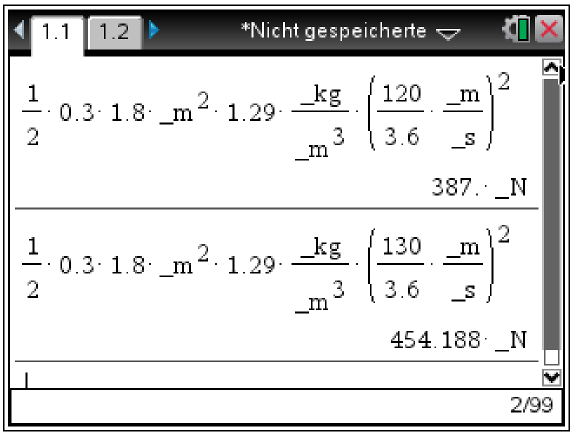
$$\Delta t = 0{,}224\text{h} = 13{,}5\text{min}$$

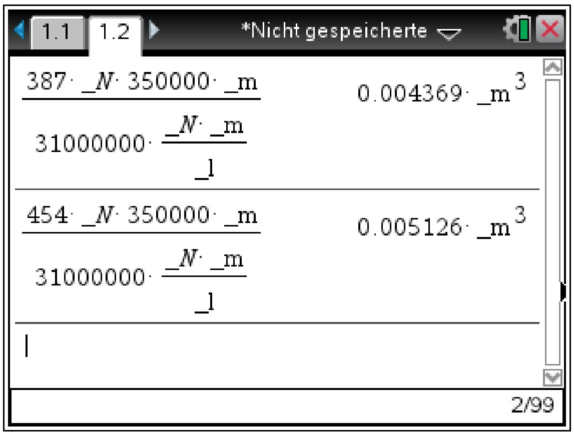
ANTWORT

Bei einer Gesamtfahrzeit von knapp 2¾ Stunden hat der 10 km/h schnellere PKW immerhin einen zeitlichen Vorsprung von 13,5 min herausgeholt. Ist er angekommen, hat das langsamere Auto noch etwa 27 km bis zum Ziel zu fahren. Dafür hat es aber auch 0,7 Liter Benzin eingespart, weil der Luftwiderstand geringer war.

Wie – das hat gar keiner gefragt???
Hätte er aber tun können!

Als kleine Zugabe folgt die Berechnung des Luftwiderstandes (links), welcher Luftreibungsarbeit und damit mehr Energieverbrauch erforderlich macht. Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung des Heizwertes (rechts) der luftreibungsabhängige Benzinverbrauch:





Damit sind wir allerdings noch nicht in der Lage, den tatsächlichen Benzinverbrauch zu berechnen, denn weitere Einflussfaktoren (wie z.B. die Motordrehzahl oder die Rollreibung) werden hier nicht berücksichtigt.

Zwei PKW's fahren auf derselben Strecke, der eine von Schmalkalden nach Berlin, der andere in der Gegenrichtung. Die Entfernung zwischen den Metropolen beträgt 350 km. Sie starten gleichzeitig, allerdings fährt der erste durchschnittlich mit 130 km/h, der zweite nur mit 120 km/h. Wann und wo begegnen sie sich?

GEGEBEN

gleichförmige Bewegung mit zwei Körpern

s_{ges} = 350 km
v_1 = 130 kmh^{-1}
v_2 = 120 kmh^{-1}
(beide gleichförmig)

GESUCHT

t_1, s_1 bei Begegnung

HINWEIS

Wir erwarten, dass der schnellere PKW_1 bis zur Begegnung die größere Strecke s_1 zurückgelegt hat. Bis dahin waren beide natürlich gleich lange unterwegs ($t_1 = t_2$).

LÖSUNGS

$$s = v \cdot t \rightarrow t = \frac{s}{v} \rightarrow \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}$$

Das sind zu viele Unbekannte! Aber wenn wir berücksichtigen, dass beide insgesamt 350 km gefahren sein müssen …

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{350\text{km} - s_1}{v_2} \rightarrow s_1 = \frac{350\text{km} \cdot v_1}{v_1 + v_2} = 182\text{km}$$

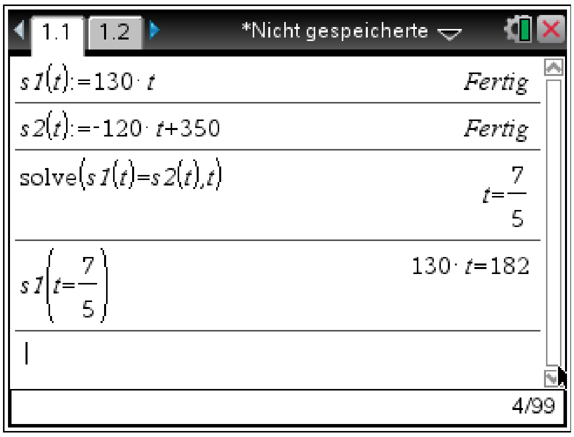
$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = 1{,}4\text{h} = 84\,\text{min}$$

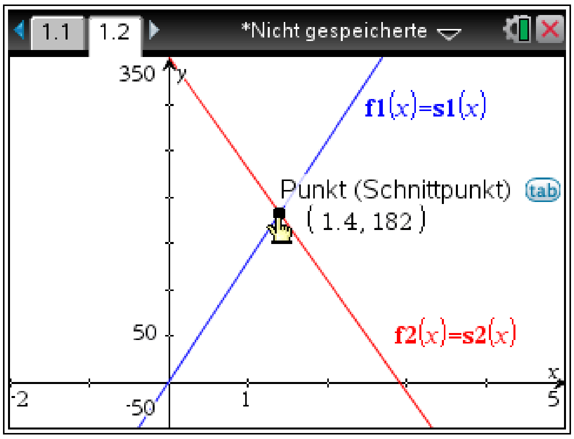
ANTWORT

Bis zur Begegnung nach 84 min fährt der schnellere PKW 182 km, der langsamere nur 168 km.

BONUS:

Man kann für die Entfernung der PKW's von z.B. Berlin auch für jedes Auto eine eigene Formel erfinden, die sich aus dem gültigen Weg-Zeit-Gesetz ergibt. Da uns das zweite Fahrzeug aus Berliner Sicht entgegen kommt, ist seine Geschwindigkeit negativ …





Egal, mit welcher Methode – rechnerisch oder grafisch –man kommt immer auf die oben „klassisch" berechnete Lösung. Nur viel schneller!