Aufgabe C3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt P (–3 ; 5 ; 3) sowie die Geraden g und h gegeben durch:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R} \text{ und } h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt P nicht auf der Gerade g liegt! Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε an, die den Punkt P und die Gerade g enthält! **2 BE**

b) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind und ihre Richtungsvektoren zueinander senkrecht verlaufen! **4 BE**

c) Gerade h durchstößt die Ebene ε (aus Aufgabe a) im Punkt D. Ermitteln Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes D! **3 BE**

d) Eine Gerade k verläuft durch den Punkt P und schneidet die Gerade g im Punkt $S(-2;\,5;\,2)$.

Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden k und g! **3 BE**

e) Gegeben ist der Punkt $Q\left(-\frac{8}{3};\,\frac{17}{3};\,\frac{7}{3}\right)$.

Zeigen Sie, dass das Dreieck PQS gleichschenklig und rechtwinklig ist! **4 BE**

f) Parallel zur Strecke $\overline{PQ}$ verläuft durch den Punkt S die Gerade t. Geben Sie für t eine Gleichung an!

Für welche Punkte U und V auf der Geraden t beträgt der Flächeninhalt der Trapeze PQSU und PQVS jeweils 2 FE?

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte U und V! **4 BE**

Lösungen zu Aufgabe C3

a)	Nachweis: $P \notin g$ Gleichung für ε, z.B.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $u, v \in R$	2 BE
b)	Nachweis der Orthogonalität keine gemeinsamen Punkte von g und h	4 BE
c)	Ansatz Bearbeiten des Gleichungssystems Koordinaten des Durchstoßpunktes: $D(-1; 1; 3)$	3 BE
d)	Ansatz und Geradengleichung → $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ergebnis: $\alpha = 45°$	3 BE
e)	Nachweise: $\left\lvert \overrightarrow{QS} \right\rvert = \left\lvert \overrightarrow{QP} \right\rvert = 1$; $\overrightarrow{QP} \circ \overrightarrow{QS} = 0$	4 BE
f)	Geradengleichung für t z.B.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $s \in R$ Ansatz für einen der Punkte U oder V z. B.: $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OS} - 3 \cdot \overrightarrow{PQ}$ Ergebnisse: $U(-3; 3; 4)$ und $V(-1; 7; 0)$	4 BE