Aufgabe B3

Für jede reelle Zahl (a>0) ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$y = f_a(x) = a \cdot \ln\left(x^2 + a\right) - a \quad (x \in R)$$

a) Welches Symmetrieverhalten weist der Graph von f_a auf?

Geben Sie jeweils einen Wert für a so an, dass der Graph von f_a
- keine
- genau eine oder
- genau zwei Nullstellen hat!

$\boxed{\text{4 BE}}$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf lokale Extrem- und Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an! (Auf den Nachweis der Wendepunkte wird verzichtet.)

$\boxed{\text{6 BE}}$

c) Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen von f_2 und f_3 im Intervall $-5 \leq x \leq +5$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

$\boxed{\text{3 BE}}$

d) Begründen Sie, dass sich die Wendetangenten eines Graphen von f_a auf der y-Achse schneiden! Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunktes S!

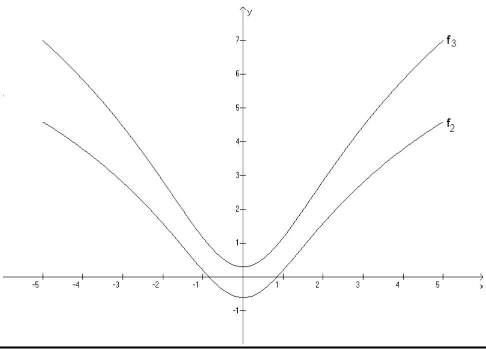
Für welches a fällt S mit dem Koordinatenursprung zusammen? Geben Sie a für den Fall an, dass die Wendetangenten senkrecht aufeinander stehen!

$\boxed{\text{5 BE}}$

e) Der Graph der Funktion f_a', die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung x = 2 schließen eine Fläche vollständig ein. Ermitteln Sie deren Inhalt in Abhängigkeit von a! Vereinfachen Sie den Term!

$\boxed{\text{2 BE}}$

Lösungen zu Aufgabe B3

a)	Symmetrie bzgl. y-Achse Fallunterscheidung: $x^2 = e - a$: $a < e$: $N_1\left(-\sqrt{e-a};\ 0\right)$, $N_2\left(+\sqrt{e-a};\ 0\right)$ $a = e$: $N(0;\ 0)$ $a > e$: keine Schnittpunkte	**5 BE**
b)	$f_a'(x) = \dfrac{2ax}{x^2+a}$; $f_a''(x) = \dfrac{2a(a-x^2)}{(x^2+a)^2}$ Extremstelle: $x_E = 0$ Nachweis: $f_a''(0) = 2 > 0$, lokales Minimum Extrempunkt: $T(0;\ a \cdot \ln a - a)$ Wendestellen: $x_1 = +\sqrt{a}$; $x_2 = -\sqrt{a}$ Wendepunkte: $W_1\left(\sqrt{a};\ a\ln 2a - a\right), W_2\left(-\sqrt{a}; a\ln 2a - a\right)$	**7 BE**
c)		**3 BE**
d)	Begründung Gleichung einer Tangente z.B.: $y = \sqrt{a} \cdot x + a\ln 2a - 2a$ Schnittpunkt: $S\left(0;\ a\ln 2a - 2a\right)$ $S \equiv O$ (O - Koordinatenursprung): a = 0,5e² Wendetangenten senkrecht: a = 1	**5 BE**
e)	Erkennen, dass x = 0 untere Grenze und $f_a(x)$ Stammfkt. von $f_a'(x)$ ist Einsetzen, zusammenfassen $A = a \cdot \ln(a+1)$ FE	**4 BE**
f)	Erkennen der Bedingungen: $\ln c = 0$, $c = 1$ $g'(x) = \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$; $g'(0) = \dfrac{b}{c}$; $b = 2$ $g'(2) = 0$, $a = -\dfrac{1}{2}$ Ansatz Begründung D_g: $2-\sqrt{6} < x < 2+\sqrt{6}$	**6 BE**