

## Orientierungsaufgaben für das ABITUR 2014

# MATHEMATIK

Im Auftrag des TMBWK erarbeitet von:  
Aufgabenkommission Mathematik Gymnasium,  
Fachberater Mathematik Gymnasium,  
CAS-Multiplikatoren

### Hinweise für Prüfungsteilnehmerinnen und -teilnehmer

Bearbeitungszeit: 270 Minuten

Bearbeiten Sie zuerst den Teil A. Nach Abgabe der Lösungen für den Teil A werden die Aufgaben der Teile B und C mit den angegebenen Hilfsmitteln bearbeitet.

Wählen Sie von den Aufgaben B1 und B2 **eine** zur Bearbeitung aus.

Wählen Sie von den Aufgaben C1 und C2 **eine** zur Bearbeitung aus.

Hilfsmittel:

- Teil A

Es dürfen außer Zeichengeräten keine weiteren Hilfsmittel verwendet werden.

- Teile B und C

Taschenrechner und Computeralgebrasysteme, die im Unterricht verwendet wurden (Diese dürfen keine zusätzlichen Dateien oder Funktionen/Programme enthalten.)

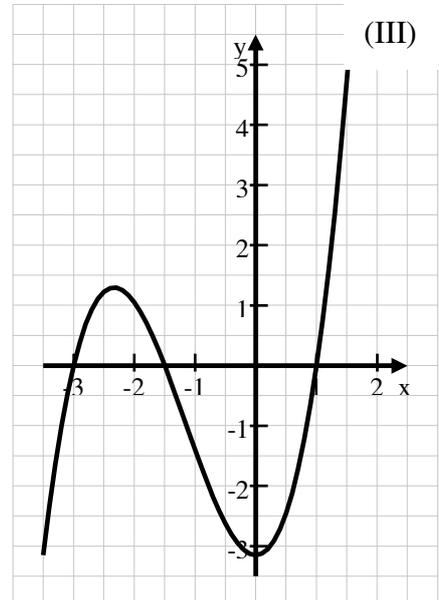
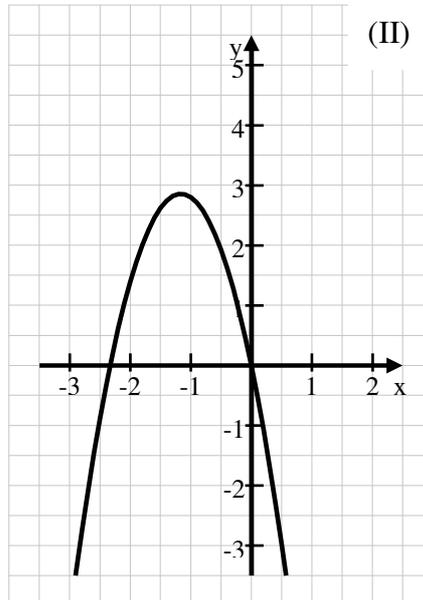
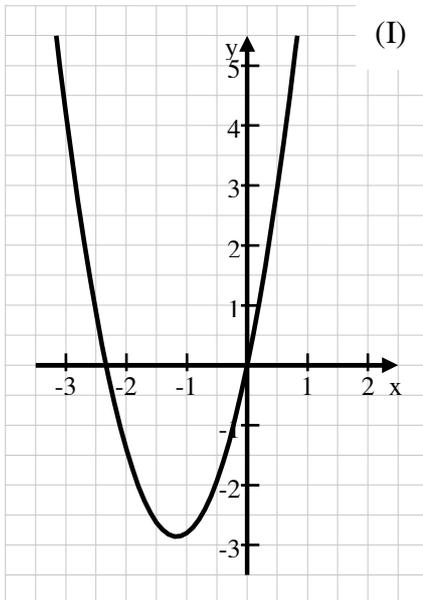
Formelsammlungen/Tafelwerke, die im Unterricht verwendet wurden (Diese dürfen keine Anmerkungen bzw. Ergänzungen enthalten.)

Damit der Lösungsweg nachvollziehbar ist, sind wesentliche Zwischenergebnisse aufzuschreiben.

Neben jeder Teilaufgabe steht die für diese Teilaufgabe maximal erreichbare Anzahl von Bewertungseinheiten (BE).

## Pflichtaufgaben Teil A

1. Dargestellt sind die Graphen einer ganzrationalen Funktion  $f$ , der zugehörigen Ableitungsfunktion  $f'$  und einer weiteren Funktion  $g$ .



Entscheiden Sie, welche Abbildungen die Graphen der Funktionen  $f$  und  $f'$  sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

2 BE

2. Gegeben ist die Funktion  $f$  durch  $y = f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ .  
Untersuchen Sie, welche der folgenden Geraden die Normale an den Graphen von  $f$  an der Stelle  $x = 2$  ist.

(I)  $y = 4x - 5$

(II)  $y = -\frac{1}{4}x + 3,5$

(III)  $y = -\frac{1}{4}x - 5$

(IV)  $y = -4x + 3,5$

3 BE

3. Die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  besitzen an der Stelle  $x = a$  mit  $a \in \mathbb{R}$  eine gemeinsame Tangente.  
Beschreiben Sie eine Möglichkeit zum Nachweis dieser Eigenschaft.

2 BE

4. Bestimmen Sie eine Gleichung der Stammfunktion der Funktion  $f$  mit  $y = f(x) = 6x^2 - 4x$ , deren Graph durch den Punkt  $P(1; 3)$  verläuft.

2 BE

5. Gegeben sind die Funktionen  $f$  durch  $f(x) = 2^{x+3}$  und  $g$  durch  $g(x) = 2^x$ .
- a) Beschreiben Sie, wie der Graph von  $f$  aus dem Graphen der Funktion  $g$  hervorgeht. 1 BE
- b) Bestimmen Sie die Stelle, an der die Funktion  $f$  den Funktionswert 1 besitzt. 1 BE
6. Die Punkte  $A(3;4;1)$ ,  $B(6;3;2)$ ,  $C(3;0;3)$  und  $D(0;1;2)$  sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks  $ABCD$ .
- a) Weisen Sie nach, dass  $ABCD$  ein Parallelogramm ist. 2 BE
- b) Prüfen Sie, ob dieses Viereck sogar ein Rechteck ist. 2 BE
7. Für jeden Richtungsvektor  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) ist eine Gerade gegeben durch  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{b}; r \in \mathbb{R}$ .
- a) Geben Sie einen Vektor  $\vec{b}$  so an, dass die Gerade  $g$  parallel zur  $x$ -Achse verläuft. 1 BE
- b) Geben Sie einen Vektor  $\vec{b}$  so an, dass die Gerade  $g$  parallel zur  $y$ - $z$ -Ebene ist. 1 BE
8. Ein idealer Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird genau zweimal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt der Augenzahlen größer als 16 ist. 1 BE
9. In einer Urne liegen 7 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es wird nacheinander ohne Zurücklegen je eine Kugel zufällig gezogen. Wie oft muss man mindestens ziehen, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % mindestens eine der gezogenen Kugeln schwarz ist? 2 BE

## Teil B Wahlaufgabe B1

Gegeben ist die Funktion  $f$  durch die Gleichung  $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{10}x}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

- a) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass es nur einen Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen gibt.  
Untersuchen Sie den Graphen von  $f$  auf lokale Extrempunkte und geben Sie deren Koordinaten an.

Zeigen Sie, dass  $x_{W_1} = -10 \cdot \sqrt{2} + 20$  und  $x_{W_2} = 10 \cdot \sqrt{2} + 20$  die Wendestellen des Funktionsgraphen von  $f$  sind.

5 BE

- b) Gegeben sind die Graphen zweier Funktionen.  
Begründen Sie anhand der Eigenschaften der Funktion  $f$ , welche Abbildung nicht den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  von  $f$  wiedergibt.

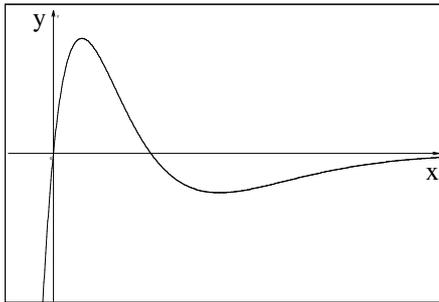


Abbildung 1

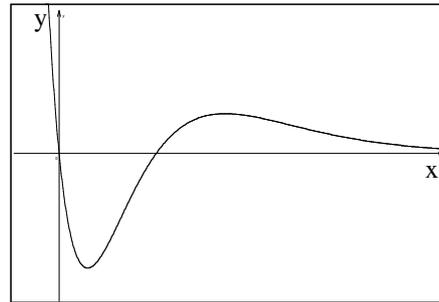


Abbildung 2

1 BE

- c) Die Geraden  $x = x_{W_1}$  und  $x = x_{W_2}$ , der Graph von  $f$  und die  $x$ -Achse begrenzen eine Fläche vollständig.  
Ermitteln Sie eine Gleichung einer Geraden, die diese Fläche halbiert.

3 BE

- d) An einer Stelle  $u$  mit  $u > 0$  ist die Differenz der Funktionswerte der Graphen der Funktion  $f$  und der zugehörigen Ableitungsfunktion  $f'$  maximal.  
Berechnen Sie diese maximale Differenz.

4 BE

- e) Für jede reelle Zahl  $z$  ist eine Gerade durch die Gleichung  $y = z$  gegeben.

Geben Sie näherungsweise die Schnittstellen für  $z = 25,3$  an.  
 Untersuchen Sie die Anzahl der Schnittpunkte einer solchen Geraden mit dem Graphen der Funktion  $f$  in Abhängigkeit von  $z$ .

3 BE
------

- f) Für jede reelle Zahl  $t$  ist die Funktion  $f_t$  mit

$$f_t(x) = \frac{1}{2}(x+t)^2 \cdot e^{-\frac{1}{10}(x+t)} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ gegeben.}$$

Beschreiben Sie, wie der Graph von  $f_t$  aus dem Graphen von  $f$  hervorgeht.

An den Graphen von  $f_t$  wird im Schnittpunkt von  $f_t$  mit der  $y$ -Achse eine Tangente gelegt.

Für welche Werte von  $t$  bildet diese Tangente mit den Koordinatenachsen im 2. Quadranten ein gleichschenkliges Dreieck?

4 BE
------

## Wahlaufgabe B2

1. In einem Experiment wurde die Temperatur  $\vartheta$  von Wasser in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in einer Messreihe erfasst:

Zeit $t$ in Minuten	0	2	5	10	15	30	45	60
Temperatur $\vartheta$ in $^{\circ}\text{C}$	68,0	65,2	61,3	55,5	50,5	39,5	32,4	28,0

- a) Die angegebenen Messwertpaare sollen näherungsweise durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden. Bestimmen Sie dazu je eine lineare Funktion, eine Funktion 4. Grades und eine Exponentialfunktion. Skizzieren Sie die Graphen der von Ihnen angegebenen Funktionen im Bereich von 0 bis 150 Minuten. Geben Sie den Funktionstyp an, der den Abkühlungsprozess am sinnvollsten beschreibt und begründen Sie Ihre Entscheidung.

6 BE

- b) Das Newtonsche Abkühlungsgesetz beschreibt den Temperaturverlauf durch die Gleichung  $g(t) = a \cdot e^{k \cdot t} + c$  ( $a > 0$ ;  $c > 0$ ). Dabei sind  $a$ ,  $k$  sowie  $c$  Parameter und  $t$  die Zeit in Minuten. Begründen Sie, dass beim Abkühlen  $k < 0$  gilt. Erläutern Sie die Bedeutung der Parameter  $a$  und  $c$  im Zusammenhang mit einem Abkühlungsprozess.

3 BE

2. Gegeben ist eine Funktion  $f$  durch  $y = f(x) = 60 \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot x} + 20$  und der Punkt  $B(-10; f(-10))$ .

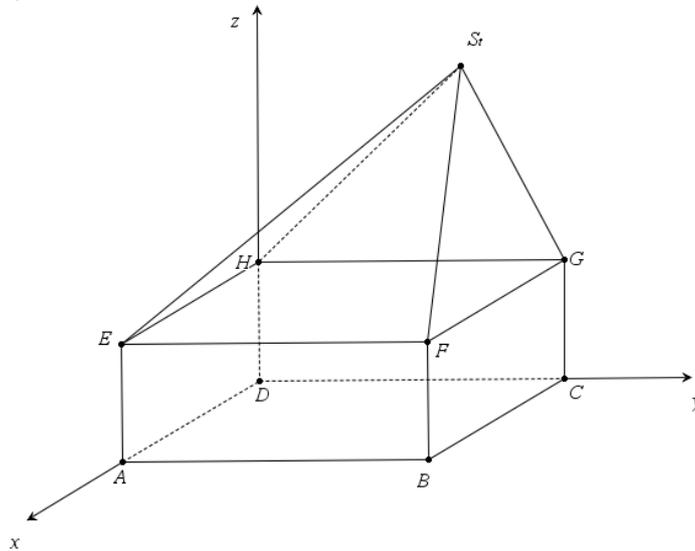
- a) Die Tangente  $t$  an den Graphen von  $f$  im Punkt  $B$  begrenzt mit dem Graphen von  $f$  und der  $y$ -Achse eine Fläche  $A$  vollständig. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente  $t$ . Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $A$ .

3 BE

- b) Auf dem Graphen von  $f$  liegt ein Punkt  $P$ , der vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand aller Punkte des Graphen besitzt.  
Begründen Sie, dass es genau einen Punkt mit dem kleinsten Abstand gibt.  
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes  $P$  und berechnen Sie diesen Abstand. 5 BE
- c) Untersuchen Sie, ob es auf dem Graphen von  $f$  einen Punkt  $Q$  gibt, so dass der Winkel  $\sphericalangle QOB = 90^\circ$  ist.  
Geben Sie für diesen Fall die  $x$ -Koordinate des Punktes  $Q$  an. 3 BE

## Wahlaufgabe C1

1. Dargestellt ist ein aus einem Quader und einer schrägen Pyramide zusammengesetzter Körper mit  $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = 5 \text{ LE}$ ,  $|\overline{AE}| = 3 \text{ LE}$ . Die Spitze  $S_t$  der Pyramide hat die Koordinaten  $S_t(0; t; 8)$  mit  $t \in \mathbb{R}$  (siehe Skizze).



Skizze nicht maßstäblich

Der Punkt  $M$  ist der Mittelpunkt der Kante  $\overline{AD}$ . Für jede reelle Zahl  $t$  gibt es eine Gerade  $g_t$ , die durch die Punkte  $M$  und  $S_t$  verläuft. Die Gerade  $k$  ist durch die Punkte  $B$  und  $H$  festgelegt.

- a) Für  $t = \frac{25}{3}$  schneiden sich die Geraden  $g_{\frac{25}{3}}$  und  $k$  im Punkt  $P$ .

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes  $P$ .

4 BE

- b) Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters  $t$  auf das Volumen des zusammengesetzten Körpers.

2 BE

- c) Bestimmen Sie eine Gleichung für den Abstand  $d(t)$  des Punktes  $S_t$  zur Geraden  $k$  in Abhängigkeit von  $t$ . Untersuchen Sie, für welchen Wert von  $t$  der Abstand  $d(t)$  ein Minimum annimmt.

4 BE

2. Halterungen für Sonnenkollektoren werden in zwei Arbeitsgängen produziert. Untersuchungen der vergangenen Jahre haben gezeigt, dass im ersten Arbeitsgang Produktionsfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,06 und im zweiten Arbeitsgang mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 jeweils unabhängig voneinander auftreten.

a) Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Halterung fehlerfrei produziert wird, beträgt 0,9024.  
Begründen Sie diese Aussage.

1 BE

b) Beschreiben Sie im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung ein Ereignis für eine Zufallsgröße  $X$ , dessen Wahrscheinlichkeit mit  $P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 \binom{50}{k} \cdot 0,0976^k \cdot (1 - 0,0976)^{50-k}$  berechnet werden kann.

2 BE

c) Der Produktion werden zufällig mehrere Halterungen entnommen und untersucht. Dabei war die neunte untersuchte Halterung die erste defekte Halterung.  
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

1 BE

d) Wie viele Halterungen sind mindestens zu überprüfen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei fehlerhaft produzierte darunter sind, größer als 0,98 ist?

2 BE

Für die Befestigung der Halterungen werden Schrauben benötigt. Bei einem Karton mit 10 000 solcher Schrauben ist die Information verloren gegangen, ob es sich um Schrauben 1. Wahl (der Anteil fehlerhafter Schrauben beträgt 6 %) oder 2. Wahl (15 % fehlerhafte Schrauben) handelt. Die Hypothese  $H_0$ : „Der Karton enthält Schrauben 1. Wahl“ soll durch eine Untersuchung an 100 Schrauben dieses Kartons getestet werden. Wenn dabei höchstens neun fehlerhafte Schrauben gefunden werden, soll der Inhalt des Kartons als 1. Wahl, sonst als 2. Wahl eingestuft werden.

e) Erläutern Sie, welche Fehler bei dieser Entscheidungsregel auftreten können und berechnen Sie die Risiken der möglichen Fehleinschätzungen.

4 BE

## Wahlaufgabe C2

1. Gegeben sind die Gerade  $g$  durch die Punkte  $A(3; 4; 5)$  und  $B(4; 4; 4)$  und eine zu  $g$  parallele Gerade  $h$  durch den Punkt  $C(1; 0; 2)$ .

a) Geben Sie für die Geraden  $g$  und  $h$  je eine Gleichung an. 2 BE

b) Weisen Sie nach, dass die Gerade  $h$  die  $x$ -Achse im Punkt  $S(3; 0; 0)$  schneidet.  
Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels der Gerade  $h$  mit der  $x$ -Achse. 4 BE

c) Berechnen Sie den Abstand der Geraden  $g$  und  $h$ . 2 BE

2. Ein Zirkus plant zum ersten Mal fünf Vorstellungen in einer Thüringer Kleinstadt. Sein Zirkuszelt bietet Platz für 350 Besucher, von denen erfahrungsgemäß 40 % Erwachsene sind.

a) Nach Rücksprache mit dem Bürgermeister rechnet der Zirkusdirektor mit fünf ausverkauften Veranstaltungen in dieser Stadt und kalkuliert dafür Einnahmen in Höhe von 14 000 €. Die Eintrittskarte für ein Kind kostet 2 € weniger als die für einen Erwachsenen. Andere Ermäßigungen gibt es nicht.  
Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Vorgaben den Eintrittspreis für einen Erwachsenen. 2 BE

b) Der Clown Arthur schafft es, bei seinem Auftritt 99 % der Kinder und 90 % der Erwachsenen zum Lachen zu bringen.  
Berechnen Sie mit Hilfe eines Baumdiagrammes die Wahrscheinlichkeit, dass Arthur einen beliebig ausgewählten Besucher mit seinem Auftritt zum Lachen bringt. 2 BE

- c) Während eines neuen Tricks der Hochseilartisten sitzt die vierjährige Ida auf dem Seil. Gehen Sie davon aus, dass ihr diese Darbietung momentan nur zu 95 % gelingt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

A:= „Ida gelingt ihre Darbietung in allen fünf Vorstellungen.“

B:= „In genau einer Vorstellung gelingt die Darbietung nicht.“

C:= „Ida misslingt ihre Darbietung frühestens bei der vierten Vorstellung.“

3 BE
------

- d) Aus Erfahrung weiß der Zirkusdirektor, dass 5 % der Einwohner eine der Vorstellungen besuchen. Der Bürgermeister ist sicher, dass in seiner Stadt 10 % der Einwohner eine Vorstellung besuchen und bietet ihm eine Wette an:

Es werden 50 rein zufällig ausgewählte Bürger telefonisch befragt. Der Bürgermeister hat die Wette gewonnen, wenn

mindestens 4 der Befragten angeben, in den Zirkus zu gehen.

Sollte der Zirkusdirektor auf Grund seiner Erfahrung diese Wette annehmen?

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

3 BE
------

- e) Für eine Zirkusnummer werden Zuschauer in die Manege gebeten. Sie sollen jeweils 5 Bälle in einen Eimer werfen. Erfahrungsgemäß treffen die Mitspieler bei 2 von 3 Würfeln. Wie viele Mitspieler werden benötigt, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 und höchstens 20 Bälle in dem Eimer landen, maximal wird.

2 BE
------